Proceedings of IAM, V.11, N.1, 2022 pp.17-26

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДОБЫЧИ НЕФТИ ГАЗЛИФТНЫМ СПОСОБОМ - СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

Ф.А. АЛИЕВ[1,2], М.М. МУТАЛЛИМОВ[1,2], Н.А.САФАРОВА[1] , И.А. МАГЕРРАМОВ[1], К.А. ГУЛИЕВ[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2]Институт Информационных Технологии, НАНА, Баку, Азербайджан

E-mail: f_aliev@yahoo.com, mmutallimov@yahoo.com

Абстракт. Формулируется задача стабилизации добычи нефти газлифтным способом и показывается, что решение сводится к частично периодической оптимизации на подъемнике. Показывается, что ее решение сводится к решению периодического матричного уравнения Риккати. Результаты иллюстрируются числовым примером.

Ключевые слова: газлифт, оптимальная стабилизация, частично периодическая оптимизация, периодическое уравнение Риккати, оптимальный регулятор.

AMS Subject Classification: 49M25, 49N20

1. Введение. Как известно [2,12,15], помимо фонтанного метода для добычи нефти применяется газлифтный способ [7,8]. Существуют разные математические подходы [5,10] для нахождения оптимальных траектории (движение ГЖС) и управлений (начальных объемов газа) при добыче нефти [13], так как движение описывается системой гиперболических дифференциальных уравнений. Из-за сложности представления решения соответствующих задач оптимизации для таких систем, проводится осреднение по времени [1,3] и рассматривается оптимизационная задача для нахождения программных траекторий и управлений [6,9], где ее решение сводится к нахождению периодической задачи оптимизации на подъёмнике в газлифтной установке.

Более интересным является рассмотрение задачи оптимальной стабилизации около заданной программной траектории и управлений на бесконечном интервале, где она также сводится к решению частично периодической задачи оптимизации. Показывается, что нахождение решения соответствующей задачи оптимизации требует решение матричного периодического уравнение Риккати, а ее решение может быть представлено с помощью соответствующих матричных алгебраических уравнений Риккати.

2. Постановка задачи. Рассмотрим газлифтный процесс при добыче нефти (см. фиг 1) и предположим, что в кольцевом пространстве движение газа описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = F_1 y, \qquad 0 < x \quad < l \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0 = u\,, \tag{2}$$

где на линии l газ смешивается с нефтью из пластах и

$$y(l+0) = F_\delta y_q(l-0) + F_\chi y_\chi(l-0)\,, \tag{3}$$

Здесь F_δ и F_χ матрицы, которые определяются из соответствующих задач идентификации [3], y_q -нагнетательный газ, двигающийся в кольцевом пространстве, y_χ -объем нефти, протекающий в пласте и смешиваясь образует вначале подъёмника газожидкостную смесь (ГЖС), и с воздействием $y_0 = u$ описывается уравнением

$$\dot{y} = F_2 y, \qquad l+0 < x < 2l \tag{4}$$

в конце, т.е. параметры F_δ, F_χ восстанавливаются с помощью метода идентификации [3] (алгоритм наименьших квадратов [11]).

Итак, задачу оптимальной стабилизации ставим в следующем виде, т.е. требуется найти начальный объем газа u из (2) так, чтобы

$$y(2l) = \alpha y(l+0) \tag{5}$$

и квадратичный функционал

$$J = u' C u + \sum_{k=1}^{\infty} y'(kl+0)\, Q_1 y(kl+0) + \int_0^\infty y'(x) Q y(x) dx \tag{6}$$

достигал бы экстремального значения при условии асимптотической устойчивости замкнутой системы (1), (3), (4). Здесь $C < 0$, $Q, Q_1 > 0$ симметричные матрицы.

Для простоты рассмотрим решение на интервале $0 < x < 2l$.

3. Построение оптимального регулятора при $y(l+0) = y(2l)$. Сначала для задачи оптимизации (1)-(6), используя метод Лагранжа, опишем уравнение Эйлера-Лагранжа в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= F_1 y, \\ \dot{\lambda} &= -Qy - F_1'\lambda \end{aligned}\right\} 0 < x < l-0\,, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} y(l+0) &= F_\chi y(l-0) - F_\delta' e^{F_1' l} C^{-1} F_\delta e^{F_1 l} \lambda(l+0) \\ \lambda(l-0) &= Q_1 y(l-0) + F_\chi' \lambda(l+0) \end{aligned}\right\} x = l, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= F_2 y, \\ \dot{\lambda} &= -Qy - F_2'\lambda \end{aligned}\right\} l+0 < x < 2l\,, \tag{9}$$

$$u = -C^{-1}\lambda(0). \tag{10}$$

Решив краевые задачи (7), находим решение [11] задачи (1)-(6). Сначала пишем решение дифференциальное уравнение (7) в виде

$$\begin{bmatrix} y(l-0) \\ \lambda(l-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{F_1 l} & 0 \\ H_1 & e^{-F_1' l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

где $H_1 = e^{-F_1' l} D - D e^{F_1 l}$ и $DF_1 - F_1' D + Q = 0$, а из (9)

$$\begin{bmatrix} y(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{F_2 l} & 0 \\ H_2 & e^{-F_2' l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(l+0) \\ \lambda(l+0) \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

здесь $H_2 = e^{-F_2' l} D_1 - D_1 e^{F_2 l}$ и $-D_1 F_2 - F_2' D_1 + Q = 0.$

Таким образом, решение уравнение (7)-(9) в точках $l-0,\ l+0$ и $2l$ являются соотношения (11), (8) и (12) соответственно. Отметим, что последнее соотношение является дискретным уравнением Эйлера Лагранжа. Действительно, после несложных преобразований можно представить их в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} y(l-0) &= e^{F_1 l} y(0) \\ \lambda(0) &= -\left(e^{F_1' l} D e^{F_1 l}\right) y(0) + e^{F_1' l} \lambda(l-0) \end{aligned}\right\}, \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} y(l+0) &= F_\chi y(l-0) - e^{F_1' l} F_\delta' C^{-1} F_\delta e^{F_1 l} \lambda(l+0) \\ &\lambda(l-0) - Q y(l-0) + F_\chi' \lambda(l+0) \end{aligned}\right\}, \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} y(2l) &= e^{F_2 l} y(l+0) \\ \lambda(l+0) &= -\left(D_1 - e^{F_2' l} D_1 e^{F_2 l}\right) y(l+0) + e^{F_2' l} \lambda(2l) \end{aligned}\right\}. \qquad (15)$$

Уравнения (13) определяют характер подаваемого газа при входе пластов (14), а (15) определяет выход ГЖС. Если требуется, чтобы

$$y(l+0) = y(2l), \qquad (16)$$

то это означает, что ГЖС в $l+0$ равен ГЖС в $2l$. Это практически невозможно, т.е. уравнение не может обеспечить это, как отмечено в [14]. Действительно, пусть удовлетворяется (16). Тогда, из (15) принимаем

$$\lambda(l+0) = S(l+0) y(l+0) \qquad (17)$$

и учитывая (17) в (15) для $S(l+0)$ и $S(2l)$ получим

$$S(l+0) = \left(D - e^{F_2' l} D e^{F_2 l}\right) + e^{F_2' l} S(2l) e^{F_2 l}. \qquad (18)$$

Из условия (16) вытекает, что $\lambda(l+0) = \lambda(2l)$ и

$$S(l+0) = S(2l) = S \quad , \qquad (19)$$

а (18) переходит к следующему алгебраическому дискретному уравнению Ляпунова

$$S = \left(D - e^{F_2' l} D e^{F_2 l}\right) + e^{F_2' l} S e^{F_2 l}. \tag{20}$$

Соотношение (20) не обеспечивает асимптотическую устойчивость первого уравнения (15). Поэтому имеет место не условие (16), а условие

$$y(2l) = y(l-0). \tag{21}$$

А это означает, что нефть, получаемая из пласта, полностью выводится как дебит. Если это невозможно, то условие (21) можно заменить условием

$$y(2l) = \alpha y(l-0), \tag{22}$$

где $0 < \alpha < 1$.

4. Случай при $y(2l) = y(l-0)$**.** Как уже мы отмечали выше, в случае $y(2l) = y(l+0)$ полученное соотношение (20) не обеспечивает асимптотическую устойчивость первого уравнения (15). Поэтому, вместо условия (16) мы воспользуемся условием (21). Сейчас, остановимся на системах (8) и (12), где система (8) является системой Гамильтона. Отметим, что систему (12) мы легко можем написать в виде системы Гамильтона. На самом деле, из (12) получим

$$\left.\begin{array}{c} y(2l) = e^{F_2 l} y(l+0) \\ \lambda(l+0) = e^{F_2' l} H_2 y(l+0) + e^{F_2' l} \lambda(2l) \end{array}\right\}, \tag{23}$$

где матрица $e^{-F_2 l} H_2$ является симметричной. Введем следующие обозначения

$$\left.\begin{array}{c} y(l-0) = x(0), \quad y(l+0) = x(1), \quad y(2l) = x(2) \\ \lambda(l-0) = \tilde{\lambda}(0), \quad \lambda(l+0) = \tilde{\lambda}(1), \quad \lambda(2l) = \tilde{\lambda}(2) \end{array}\right\}. \tag{24}$$

Далее, обозначим

$$\left.\begin{array}{c} \psi(0) = F_\chi, \quad \psi(1) = e^{F_2 l} \\ M(0) = F_\delta' e^{F_1' l} C^{-1} F_\delta e^{F_1 l}, \qquad M(1) = 0 \\ R(0) = Q_1, \quad R(1) = e^{F_2 l} H_2 \end{array}\right\}, \tag{25}$$

тогда системы (8) и (23) сводятся к следующим системам:

$$\left.\begin{array}{c} x(1) = \psi(0)x(0) - M(0)\bar{\lambda}(1) \\ \bar{\lambda}(0) = R(0)x(0) + \psi'(0)\bar{\lambda}(l) \end{array}\right\}, \tag{26}$$

$$\left.\begin{array}{c} x(2) = \psi(l)x(1) - M(1)\bar{\lambda}(2) \\ \bar{\lambda}(1) = R(1)y(1) + \psi'(1)\bar{\lambda}(2) \end{array}\right\}, \tag{27}$$

отметим, что системы (26) и (27) являются частным случаем системы (3.3.13) из [4]. Тогда, следуя методами из [4] , воспользовавшись формулами (3.3.17) и (3.3.18) из этой работы при $i = 0,\ j = 2$, мы получим связь между

$x(0),\bar{\lambda}(0)$ и $x(2),\bar{\lambda}(2)$ (другими словами, между $y(l-0),\lambda(l-0)$ и $y(2l),\lambda(2l)$) в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} x(2) &= \bar{\psi}(0,2)x(0) - \bar{M}(0,2)\bar{\lambda}(2) \\ \bar{\lambda}(0) &= \bar{R}(0,2)x(0) + \bar{\psi}'(0,2)\bar{\lambda}(2) \end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

где $\bar{\psi}(0,2),\bar{M}(0,2)$ и $\bar{R}(0,2)$ определяются из следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\psi}(0,2) &= \psi(1)Q(0,1)\bar{\psi}(0,1), \quad \bar{\psi}(0,1) = \psi(0), \\ \bar{M}(0,2) &= M(1)Q(0,1)\bar{M}(0,1)\psi'(1), \quad \bar{M}(0,1) = M(0) \\ \bar{R}(0,2) &= \bar{R}(0,1)\bar{\psi}'(0,1)R(1)Q(0,1)\bar{\psi}(0,1), \quad \bar{R}(0,1) = R(0) \\ Q(0,1) &= [E + \bar{M}(0,1)R(1)]^{-1} = [E + M(0)R(1)]^{-1} \end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

отсюда имеем

$$\left.\begin{aligned} \bar{\psi}(0,2) &= \psi(1)Q(0,1)\psi(0) \\ \bar{M}(0,2) &= M(1)Q(0,1)M(0)\psi'(1) \\ \bar{R}(0,2) &= R(0)\psi'(0)R(1)Q(0,1)\psi(0) \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

Теперь из (22) при $\alpha = 1$ для $y(2l) = y(l-0)$ имеем следующие системы нелинейных дискретных алгебраических уравнений Риккати (ДАУР)

$$S(2) = \bar{\psi}(0,2)S(2)[E + \bar{M}(0,2)S(2)]^{-1}\bar{\psi}(0,2) + \bar{R}(0,2)\,, \tag{31}$$

где из условия $y(2l) = y(l-0)$ вытекает, что
$S(0) = S(2)$, т.е. $S(l-0) = S(2l)$.
Теперь, вычислим управление u.
Действительно, из первого разностного уравнения (8)

$$u = -C^{-1}F_\delta e^{F_1 l}\lambda(l+0) = F_1 l = \tag{32}$$

$$= -C^{-1}F_\delta e^{F_1 l}(F_\chi^{1-2}\lambda(l-0) - F_\chi^{1-1}Q_1 y(l-0),$$

где при условии

$$\lambda(l-0) = S(l-0)y(l-0)$$

(32) переходит к виду

$$u = -C^{-1}F_\delta e^{F_1 l}F_\chi^{1-1}(S(l-0)Q_1)y(l-0), \tag{33}$$

тогда замкнутая система частично периодических систем при помощи (28) имеет вид

$$y(2l) = \bar{\psi}(0,2)y(l-0) - M(0,2)S(2l)y(2l)$$

т.е.

$$y(2l) = (E + M(0,2)S(2l))^{-1}\bar{\psi}(0,2)y(l-0). \tag{34}$$

Таким образом, требуется найти такое решение ДАУР, чтобы система (34) имела бы собственные значения внутри единичного круга.

5. Алгоритм реализации оптимального регулятора при заданных оптимальных программных траекторий и управлений. Пусть на интервале $(0, 2l)$ вычислены оптимальные программные траектории $y(t)$ и управления u_{pr} . Тогда, для построения регулятора требуется найти такое управление u, чтобы из следующей задачи оптимизации

$$(\dot{y} - \dot{y}_{pr}) = F_1(y - y_{pr}), \; y(0) = u, \; 0 < x < l - 0, \tag{35}$$

$$y^k(l + 0) - y_{pr}^k(l + 0) = F_\delta \left(y(l - 0) - y_{pr}(l - 0)\right) - F_\delta' e^{F_1' l} u,$$

$$(\dot{y} - \dot{y}_{pr}) = F_2(y - y_{pr}), \;\; l + 0 < x < 2l,$$

$$J = \frac{1}{2}(u - u_{pr})' C(u - u_{pr}) + \frac{1}{2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (y(kl - 0) - y_{pr}(kl - 0))' Q_1 (y(kl - 0) - y_{pr}(kl - 0)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y(x) - y_{pr}(x))' Q (y(x) - y_{pr}(x)) dx, \tag{36}$$

Получили бы

$y(t) \to y_{pr}, \quad u \to u_{pr}$.

Используя результаты п.4 легко можно показать, что

$$u = -C^{-1} F_\delta e^{F_1 l} F_\chi'^{-1} (S(l - 0) - Q_1) y(l - 0) +$$
$$+ u_{pr} + (S(l - 0) - Q_1) y_{pr}(l - 0), \tag{37}$$

а $y(x)$ на интервале $(0, l)$ и $(l + 0, 2l)$ вычисляется из дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = F_1 y + \dot{y}_{pr} - F_1 y_{pr}, \quad 0 < x < l \,,$$
$$\dot{y} = F_2 y + \dot{y}_{pr} - F_2 y_{pr}, \quad 0 < x < l$$

в точке $x = l$

$$y(l + 0) = F_\chi y(l - 0) + F_\delta' \, e^{F_1' l} u + y_{pr}(l + 0) -$$
$$-F_\chi y_{pr}(l - 0) + F_\delta' \, e^{F_1' l} u_{pr}. \tag{38}$$

Таким образом, вычислив u из задачи регулировании (30), $y(t)$ находим из (38), (39).

6. Оценивание асимптотической устойчивости замкнутой системы. Отметим, что, исходя из (34) между точками $2k$ и 0 , имеются следующие соотношения:

$$y(2kl) = \left(E + M(0,2) S(2l)\right)^{-1} \bar{\psi}(0,2) y\left((2k - 1)l - 0\right) =$$
$$= \left(E + M(0,2) S(2l)\right)^{-1} \bar{\psi}(0,2) e^{F_1 l} y\left((2k - 1)l\right) =$$
$$= \left[\left(E + M(0,2) S(2l)\right)^{-1} \bar{\psi}(0,2) e^{F_1 l}\right]^k y(0) \tag{39}$$

Если собственные значения матрицы

$$\left(E + M(0,2)\middle|S(2l)\right)^{-1}\bar{\psi}(0,2)R^{F,l}$$

находятся внутри единичного круга, то и матрица системы (39) тоже обладает этим свойством. Отсюда следует, что при $k \to \infty$

$$y(2kl) \to 0 \tag{40}$$

а это означает, что при $k \to \infty$

$$\left|y(x) - y_{np}(x)\right| \to 0$$

что равносильно

$$y(x) \to y_{np}(x) \tag{41}$$

7. Заключение. В работе показывается, что построение оптимальных регуляторов при частично периодическом случае, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы, возможно при условии $y(2l) = y(l-0)$, которое требует найти такое решение ДАУР, чтобы соответствующая замкнутая система имела бы собственные значения внутри единичного круга.

Литература

1. Aliev F.A., Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Mirsaabov S.M. Calculation algorithm defining the coefficient of hydraulic resistance on different areas of pump-compressor pipes in gas lift process by lines method // SOCAR Proceedings, No.4 (2019), p. 13-17.
2. Eikrem, G. O., Aamo, O. N., Foss, B. A. Stabilization of gas-distribution instability in single-point dual gas-lift wells / - Oslo: SPE Production and Operations, -2006. V.21, N.2, - p.1-20.
3. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах // Нелинейные колебания, 2014, т.17, No 2, с . 151 – 160.
4. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм , 1989.
5. Алиев Ф.А., Алиев Н.А., Гулиев А.П., Тагиев Р. М., Джамалбеков М.А. Метод решения одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, описывающих движение в газлифтном процессе // ПММ. 2018 Т. 82. В.4. С. 512-519.
6. Алиев Ф.А., Гусейнова Н.Ш., Магеррамов И.А., Муталлимов М.М. Новый алгоритм прогонки для решения непрерывной линейно квадратичной задачи оптимального управления с неразделенными краевыми условиями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 1. С. 52–59.

7. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины // Докл. НАН Азербайджана, 2008, №4, с.30-41.

8. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса // Прикладная механика, 2010, т. 46, № 6, с.113-122.

9. Алиев Ф.А., Исмайлов Н.А., Мухтарова Н.С. Алгоритм нахождения оптимального решения одной задачи с граничным управлением // Автомат. и телемех., 2015, вып. 4, с. 97–104.

10. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М. Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом. // Доклады НАН Азербайджана, том LXV, №5, 2009, с.9-18.

11. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. М: Мир, 1972.

12. Мирзаджанзаде А.Х., Ахметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И. Технология и техника добычи нефти. Москва, Недра, 1986, 382 с.

13. Муталлимов М.М. , Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин / Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 s.

14. Цурков В.И., Муталлимов М.М., Магеррамов И.А., Алиев Ф.А. Алгоритмы решения частично периодической задачи оптимального управления посредством начальных данных // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 1.

15. Щуров В.И. Технология и техника добычи нефти. Москва: Недра, 1983, 510 с.

OPTIMAL STABILIZATION PROBLEMS OF OIL PRODUCTION BY GAS LIFT METHOD - STATIONARY CASE

F. ALIEV[1,2], M.M. MUTALLIMOV[1,2], N.A. SAFAROVA[1], I.A. MAHARRAMOV[1], K.A. KULIYEV[1]

[1]Institute of Applied Mathematics, BSU, Baku, Azerbaijan
[2]Institute of Information Technology, ANAS, Baku, Azerbaijan

E-mail: f_aliev@yahoo.com, mmutallimov@yahoo.com

Abstract. The problem of stabilization of oil production by the gas lift method is formulated and it is shown that the solution is reduced to a part of periodic optimization on the lift. It is shown that its solution reduces to solving the periodic matrix Riccati equation. The results are illustrated with a numerical example.

Keywords: gas lift, optimal stabilization, partially periodic optimization, periodic Riccati equation, optimal controller

AMS Subject Classification: 49M25, 49N20

REFERENCES

1. Aliev F.A., Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Mirsaabov S.M. Calculation algorithm defining the coefficient of hydraulic resistance on different areas of pump-compressor pipes in gas lift process by lines method // SOCAR Proceedings, No.4 (2019), p. 13-17.
2. Eikrem, G. O., Aamo, O. N., Foss, B. A. Stabilization of gas-distribution instability in single-point dual gas-lift wells / - Oslo: SPE Production and Operations, -2006. V.21, N.2, - p.1-20.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A. Zadachi optimizacii s periodicheskim kraevym usloviem i granichnym upravleniem v gazliftnyh skvazhinah // Nelinejnye kolebanija, 2014, t.17, No 2, c . 151 – 160. (Aliev F.A., Ismailov N.A. Optimization problems with a periodic boundary condition and boundary control in gas-lift wells // Nonlinear Oscillations, 2014, v.17, No 2, p . 151 - 160.)
4. Aliev F.A. Metody reshenija prikladnyh zadach optimizacii dinamicheskih sistem. Baku: Elm, 1989 (Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems. Baku: Elm, 1989.)
5. Aliev F.A., Aliev N.A., Guliev A.P., Tagiev R. M., Dzhamalbekov M.A. Metod reshenija odnoj kraevoj zadachi dlja sistemy uravnenij giperbolicheskogo tipa, opisyvajushhih dvizhenie v gazliftnom processe // PMM. 2018 T. 82. V.4. C. 512-519 (Aliev F.A., Aliev N.A., Guliev A.P., Tagiev R.M., Jamalbekov M.A. A method for solving one boundary value problem for a system of hyperbolic type equations describing motion in a gas lift process // PMM. 2018 T. 82. V.4. C. 512-519.)
6. Aliev F.A., Gusejnova N.Sh., Magerramov I.A., Mutallimov M.M. Novyj algoritm progonki dlja reshenija nepreryvnoj linejno kvadratichnoj zadachi optimal'nogo upravlenija s nerazdelennymi kraevymi uslovijami // Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija. 2021. № 1. S. 52–59. (Aliev F.A., Huseynova N.Sh., Magerramov I.A., Mutallimov M.M. A new sweep algorithm for solving a continuous linear quadratic optimal control problem with unseparated boundary conditions // Izvestiya RAN. Theory and control systems. 2021. No. 1. S. 52–59.)
7. Aliev F.A., Il'jasov M.H., Dzhamalbekov M.A. Modelirovanie raboty gazliftnoj skvazhiny // Dokl. NAN Azerbajdzhana, 2008, №4, s.30-41. (Aliev F.A., Ilyasov M.Kh., Jamalbekov M.A. Simulation of gas-lift well operation // Dokl. Azerbaijan National Academy of Sciences, 2008, No. 4, pp. 30-41.)

8. Aliev F.A., Il'jasov M.H., Nuriev N.B. Zadachi modelirovanija i optimal'noj stabilizacii gazliftnogo processa // Prikladnaja mehanika, 2010, t. 46, № 6, s.113-122. (Aliev F.A., Ilyasov M.Kh., Nuriev N.B. Problems of modeling and optimal stabilization of the gas lift process // Applied Mechanics, 2010, vol. 46, no. 6, pp. 113-122.)
9. Aliev F.A., Ismajlov N.A., Muhtarova N.S. Algoritm nahozhdenija optimal'nogo reshenija odnoj zadachi s granichnym upravleniem // Avtomat. i telemeh., 2015, vyp. 4, s. 97–104. (Aliev F.A., Ismailov N.A., Mukhtarova N.S. Algorithm for Finding the Optimal Solution of a Problem with Boundary Control // Avtomat. i telemekh., 2015, no. 4, p. 97–104.)
10. Aliev F.A., Mutallimov M.M. Algoritm dlja reshenija zadachi postroenija programmnyh traektorii i upravlenija pri dobyche nefti gazliftnym sposobom. // Doklady NAN Azerbajdzhana, tom LXV, №5, 2009, s.9-18 (Aliev F.A., Mutallimov M.M. Algorithm for solving the problem of constructing software trajectories and control in oil production by gas lift. // Reports of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, volume LXV, No. 5, 2009, pp. 9-18.)
11. Brajson A., Ho Ju Shi. Prikladnaja teorija optimal'nogo upravlenija. M: Mir, 1972. (Bryson A., Ho Yu Shi. Applied theory of optimal control. M: Mir, 1972.)
12. Mirzadzhanzade A.H., Ahmetov I.M., Hasaev A.M., Gusev V.I. Tehnologija i tehnika dobychi nefti. Moskva, Nedra, 1986, 382 s. (Mirzajanzade A.Kh., Akhmetov I.M., Khasaev A.M., Gusev V.I. Technology and technique of oil production. Moscow, Nedra, 1986, 382 p.)
13. Mutallimov M.M. , Aliev F.A. Metody reshenija zadach optimizacii pri jekspluatacii neftjanyh skvazhin / Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 s. (Mutallimov M.M. , Aliev F.A. Methods for solving optimization problems in the operation of oil wells / Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 s.)
14. Curkov V.I., Mutallimov M.M., Magerramov I.A., Aliev F.A. Algoritmy reshenija chastichno periodicheskoj zadachi optimal'nogo upravlenija posredstvom nachal'nyh dannyh // Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija. 2023. № 1. (Tsurkov V.I., Mutallimov M.M., Magerramov I.A., Aliev F.A. Algorithms for solving a partially periodic optimal control problem using initial data // Izvestiya RAN. Theory and control systems. 2023. No. 1.)
15. Shhurov V.I. Tehnologija i tehnika dobychi nefti. Moskva: Nedra, 1983, 510 s. (Shurov V.I. Technology and technique of oil production. Moscow: Nedra, 1983, 510 p.)